Capitulo 3. Teoría Cuántica de Campo

Prof. Javier García.

Javier Antonio Almonte Espinal.

Ejercicio Propuesto:

Dada la definición promedio:

$$\langle \square \rangle \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \square e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

Calcular:

$a)\ \langle x \rangle$

$b)\ \langle x^2 \rangle$

$c)\ \langle x^{2n} \rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$

Solución.

Para la solución de este ejercicio debemos de tener pendiente lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}}$$

$a)$

$$\langle x\rangle=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dx\; xe^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx \quad \text{sea } u^2=\frac{a}{2}x^2 \rightarrow u=\sqrt{\tfrac{a}{2}}x$$

$$\frac{du}{dx}=\sqrt{\tfrac{a}{2}}$$

$$\frac{du}{\sqrt{\tfrac{a}{2}}}=dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{\tfrac{a}{2}}}\rightarrow\frac{1}{\sqrt{\tfrac{a}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du\ ; \quad \text{sabemos que } \int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tfrac{a}{2}}}\rightarrow\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\; xe^{-\frac{a}{2}x^2} \quad \text{sea } v=\tfrac{a}{2}x^2$$

$$\frac{dv}{dx}=ax$$

$$\frac{dv}{ax}=dx$$

Los límites de integración $-\infty,\infty$ son valores originalmente de la variable x, ahora tenemos que llevarlo a valores de la nueva variable que es v.

Si $x=\infty\rightarrow v=\infty$

Si $x=-\infty\rightarrow v=\infty$

Entonces:

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{dv}{ax}x\; e^{-v}$$

$$\frac{1}{a}\int_{\infty}^{\infty}dv\; e^{-v}$$

$$\frac{1}{a}\left[-e^{-v}\Big|_{\infty}^{\infty}\right]=\frac{1}{a}\left[-e^{-\infty}+e^{-\infty}\right]=0$$

Concluimos que: $\int_{-\infty}^{\infty}dx\; xe^{-\frac{a}{2}x^2}=0$

$$\left\langle x\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$\left\langle x\right\rangle = 0$$

$b)$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

Sabemos que: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

Para el numerador realizaremos lo que Javier nos enseñó en el video, derivar el lado izquierdo respecto a, y el lado derecho respecto de a también.

Entonces nos queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2}\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}a^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}a^{-\frac{3}{2}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}a^{-\frac{3}{2}}$$

Así obtenemos lo que buscamos:

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{a}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}a^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \frac{1}{a}$$

$c)$

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

Sabemos que: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

Para el caso de $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}$ lo que tenemos que hacer es derivar n veces respecto a ambos lados para ver cómo se comporta el resultado y como va creciendo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}a^{-\frac{1}{2}}$$

Derivamos respecto a ambos lados: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}a^{-\frac{3}{2}}$

Nuevamente derivamos ambos lados respecto a: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}\cdot 3\ a^{-\frac{5}{2}}$

Derivamos respecto a ambos lados: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^6 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}\cdot 3\cdot 5\ a^{-\frac{7}{2}}$

Derivando nuevamente obtenemos: $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^8 e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ a^{-\frac{9}{2}}$

Cundo vamos derivando ambos lados respecto a podemos ver que como va aumentando y de qué manera, de dos en dos es decir los impares, así mismo ocurre en el exponente de la **a**, donde el dos es siempre el denominador, por lo cual podemos concluir que para el caso x^{2n}, nos queda lo siguiente:

Para $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)a^{-\frac{(2n+1)}{2}}$

Entonces:

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{a}{2}x^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2\pi}\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)\left(2n-5\right)\cdots\cdot}{a^{\frac{(2n+1)}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{2\pi}{a}}}$$

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \frac{\dfrac{\sqrt{2\pi}\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)\left(2n-5\right)\cdots\cdot}{a^{\frac{(2n+1)}{2}}}}{\dfrac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)\left(2n-5\right)\cdots\cdot}{\sqrt{2\pi}\,a^{\frac{(2n+1)}{2}}}$$

$$\left\langle x^{2n}\right\rangle = \frac{1}{a^n}\left(2n-1\right)\left(2n-3\right)\left(2n-5\right)\cdots\cdot$$

Queda demostrado.